589. リーまん面ノ型ニ就イテ

小　林　善　一（東京高師）

§1. W—平面上ニ定義サレタ單一連結無限葉ノリーまん面 F ヲ考ヘル。面ノ型問題ハ多クノ方々ニヨツテ研究サレテ居リマスが L. Ahlfor ノ方法ニ基礎ヲ置クモノハ先ヅ W_0 ヲ面上ノ原点トシテ定メ、面ニ適當ナ metric. ヲ導入シテ F カラ部分面分 F_ρ ヲ切リ取ル。F_ρ ハ W_0 ヲ含ミ、$\rho'<\rho$ ナラバ $F_{\rho'}$ ハ F_ρ ヲ含ミ且ツ $\rho\to\infty$ ニ對シテ $F_\rho\to F$ ナルモノトスル。F が拋物的ナルタメノ十分條件ハ積分

$$\int^\infty \frac{d\rho}{L(\rho)}$$

ノ發散デ書カレル。

茲ニ $L(\rho)$ ハ F_ρ ノ境界曲線ヲ上ノ metric デ測ツタ全長デアル。一般ニ F_ρ ノ含ム領域ノ数ハ一個デハナイ、証明ニ本質的ナノハ W_0 ヲ含ム領域ノ W_0 ヲ F ノ境界点カラ分ツ連結的ナル境界曲線 $\Gamma(\rho)$ 只一ツデアルカラ此ノ $\Gamma(\rho)$ ノ長サヲ以ツテ上ノ被積分項 $L(\rho)$ ニ替ヘルコトが出來ル。

對數分岐点ニ對シテハ有效デナイヤウデスが、代數分岐点ニ對シテハ、ズツト條件がヨクナル樣デス。以下二ツノ例ヲ以テ上ノ效果ヲ調ベテ見マス。

§2. 面 F ハ解析函数 $z=z(w)$ ニヨツテ單葉円板 $|z|<R$ ニ描寫サレル。但シ $R\leqq\infty$. $z=0$ ハ w_0 ニ對應サセル。

準備トシテ使フ記号定義ヲ述ベマス。

(g)-disc： F ノ單葉円板デ周上ニ少クトモ二個ノ特異点アルモノ。

(g)-Vector： (g)-disc ノ有限特異点カラ周ニ立テタ法線、中心迄。

線状ノ網 T： (g)-disc ノ球面中心ノ軌跡、前ニ位相樹木ト呼ンダモノ。

角距離： 對應スル (g)-Vectors ノ廻轉角ノ絶對値又ハソノ和。

Cylindrical surface Y： (g)-disc ノ中心ノ軌跡ト二個ヨリ多イ特異点ノ (g)-disc ノ (g)-Vectors ノ全体デ面 F ヲ分割シテ出來ル面分ヲ

$$y=\underline{\log}(w-b)+(m-\alpha)i$$

又ハ

$$y=\log(w-b)+(m+\alpha)i$$

デ y－平面ニ描写シ、ソレラノ境界ヲ F ニ従ツテ貼リ合セテ出來ル連結的ナ面。b ハ有限分岐点。m ハ原点カラノ最小角距離. α ハ面分ノ角巾。

サテ w_0 ヲ有限点トシ、之ノノツア居ル (g)-Vector ヲ角距離ノ原線トスル。y_0 ヲ w_0 ノ Y 上ノ像トスル。

$$y_0=\log|w_0-b_0|.$$

Yヲ$\triangle BAC$ノ辺BA, AC上デ切ル。但シ

$$A = y_0 + i\theta$$

$$B = y_0 - \theta \quad \text{及ビ} \quad C = y_0 + \theta .$$

$\triangle ABC$内ニアルYノ部分ノ中y_0ヲ含ムモノヲ$Q(\theta)$, $Q(\theta)$ノ中$y > \theta$トy_0ヲ分ツ境界曲線ヲ$\Gamma(\theta)$ソノ長サヲ$L(\theta)$トスル。

定理I. 積分$\displaystyle\int^{\infty}\frac{d\theta}{L(\theta)}$ガ発散スレバ$F$ハ抛物的デアル。

証明. $L(\theta)$ノ定義カラ

$$2\pi \leqq \int_{\Gamma}\left|\frac{d\log z}{dy}\right||dy|$$

Schwarzノ不等式ヲ用ヒテ

$$4\pi^2 \leqq \int_{\Gamma}|dy|\int_{\Gamma}\left|\frac{d\log z}{dy}\right|^2|dy|$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{L(\theta)} \leqq K_1\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta\int_{\Gamma}\left|\frac{d\log z}{dz}\right|^2|dy|$$

$$\leqq K_2\,(\log R - \log R_0)$$

但シK_1, K_2ハ常数, R_0ハ$\triangle BAC$上ノスベテノyニ対応スル$|z|$ノ最小値, Fガ双曲的ナラバ右辺ハ有限デアル。

§3. Cylindrical surface Yデ、Fノ一ツノ

有限代数分岐点 b ノ近傍ハ（角巾 $2n\pi$）．$I(y) \geqq 0$ デ實軸ニ平行ナル巾 $n\pi$ ノ帯ニ描寫サレル。像ハ筒状ヲナシ右方ノ境界線ヲ傳ハッテ Y ノ他ノ部分ニツナガル。ソレ故 θ ガ十分大キクナルト BA 上ノ此ノ筒ノ切口ハ閉デ，$\Gamma(\theta)$ ニハ属シナイ。

又 $b=\infty$ ノトキハ之レニ属スル (g)－Vector ハナイ、然シソノ n 葉近傍ニハ高々 $(n+1)\pi$ ノ筒状部分ニ描寫サレル。

$b=\infty$ ガ分岐点デナイトキハ $n=1$ トシテ上ノコトガ云ヘテ居ル。両者トモ θ ガ十分大キケレバ此ノ筒ノ $\triangle BAC$ ニスル切口ハ $\Gamma(\theta)$ ニ無関係デアル。

一般ニ一ツノ (g)－Vector $\overrightarrow{bd}$ ノ描寫ハ BAC トニツノ交点ヲモツ b ガ代数分岐点デアレバ θ ガ十分大キケレバニツ共 $\Gamma(\theta)$ ニ関係ガナクナル。（$d=\infty$ デ d ガ對數分岐点デアレバ右側ノ一ツノ交点ハ d ニ附属サレテ左ダケ考ヘレバヨイ）。

b ノスベテノ (g)－Vectors ガ $\Gamma(\theta)$ ニ関係ガナクナル θ ガ考ヘラレル。此ノトキ b ハ θ デ無效ト呼バウ。

$\mu_1(t)$ ヲ對數分岐点ノ $I(y)=t$ ニ横ハル (g)－Vector 描寫ノ數（$w=\infty$ ガ對數分岐点ノトキモ數ヘ入レル）トシ、$\mu_2(\theta, t)$ ヲ θ デ有效ナル代數分岐点ノ $I(y)=t$ ニ横ハル (g)－Vector ノ數トスル。

$$L(\theta) \leqq 2\sqrt{2}\int_0^\theta \left(\mu_1(t)+\mu_2(\theta,t)\right)dt$$

定理III. 積分 $\displaystyle\int_{\theta_0}^\infty \frac{dt}{\int_0^\theta(\mu_1(t)+\mu_2(\theta,t))\,dt}$

ガ発散スレバFハ抛物的デアル。

線状ノ網Tニ於テ $\mu_1(t)$ ハ原点 t_0 カラ角距離tニアル對数範囲ノ境界点ノ数(之ノ境スル對数範囲ニ從ッテ数ヘタ) $\mu_2(\theta,t)$ ハθデ有效ナル代数範囲ノ t_0 カラtニアル境界点ノ数デアル。從ッテ積分ハ夫々ニ對應スル境界弧即チ網ノ線ノ長サニナル。

§4. 代數分岐点ノ有效區間ト存在區間トノ差ガ有限デアレバ、上ノ定理ハ網ダケニ着目シテ云ヒ換ヘラレル。例ヘバ、有限個ノ w ノ上ニノミ分岐点ガアルトキヲ考ヘル。

$$a_\nu = e^{\frac{2(\nu-1)\pi i}{n}} \qquad (\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$$

吾々ノ線状網ハ *Elfving* ノ線状複体ト一致スル、何トナレバ上ノ議論ハ正則点ヲ假リノ特異点トシテ数ヘ入レルコトハ差支ヘナイカラ。

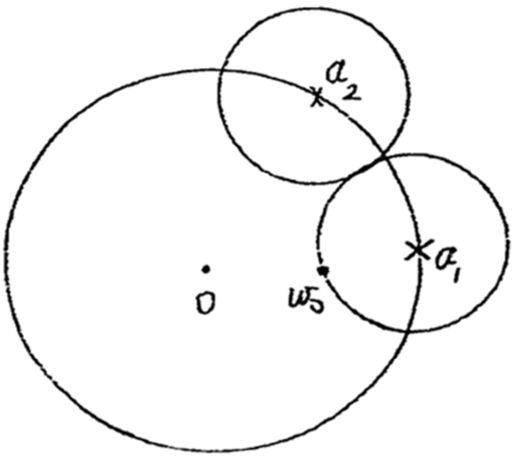
$|w|<1$ ノ一ツヲ *Original* (g)-*disc* D_0 トスル。面Fヲ

$$|w-a_\nu| = \sin\frac{\pi}{n}, \qquad \nu=1,2,\cdots\cdots,n$$

デ切ルト

1. $|w|>1$; $|w-a_\nu|>\sin\frac{\pi}{n}$, $\nu=1,2,\cdots\cdots,n$

ノ上ニ単葉面分ノ系列ヲ得ル。此ノ任意ノ一ツノY上ノ描写ハ



$$R(y)>\log\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$(k-1)\pi<I(y)<(k+1)\pi$$

ニ收マル。此ノ円板$|w|>1$, D_0カラノ角距離ガ$k\pi$トスル。

何故a_νカラ$|w|=1$ニ立テタ垂線ハ何レモ$k\pi$ノ角距離ニアルカラデアル。$\theta\geqq(k+1)\pi$デ此ノ領域ハ無数ニナル。

($y_0=\log(\sin\frac{\pi}{n})$トスル)

2. $|w|<1$, $|w-a_\nu|>\sin\frac{\pi}{n}$, $\nu=1,2,\cdots\cdots,n$

ニ単葉範囲ヲ得ル。ソノYヘノ描写ハ

$$R(y)>\log\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi<I(y)<\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$$

ニアル。$k\pi$ハコノ$|w|<1$ノD_0カラノ角距離トスル。故ニ $\theta\geqq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ デ此ノ領域ハ無数ニナル。

3. $|w-a_\nu|<\sin\frac{\pi}{n}$ $\nu=1,2,\cdots\cdots,n$

ニ単葉、有限葉又ハ無限葉ノ単一連結ノ領域ヲ得ル。前二者ノ場合 Y ヘノ描写ハ

$$R(y) < \log\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$(k_2-1)\pi \leqq I(y) \leqq (k_1+1)\pi$$

ニ落チル。$k_1\pi$ 及ビ $k_2\pi$ ハ夫々 (g)-discs $|w| \lesseqgtr 1$ ノ此ノ領域ニ関係アルモノノ D_0 カラノ角距離ノ最大値ト最小値デアル。

以上ヲ綜合シテ T ノ一ツノ代数範囲ノ角点ノ t_0 カラノ最大角距離（t_0 ハ D_0 ノ像）ガ $k_1\pi$ ナラバ此ノ範囲ハ $(k_1+1)\pi$ デ悪数ニナル。

T_m ヲ t_0 カラ $m\pi$ ニアル T ノ部分トシテ T_m ニ含マレル $\sigma_1(m)$ ヲ対数範囲ヲ限ル項（二ツノ角点ヲ結ブ長サ π ノ単位線分）ノ数（之ガ限ル対数範囲ノ数ニ従ツテ数ヘル。以下同意）トスレバ

$$(m-1)\pi \leqq t \leqq m\pi \quad \text{デ}$$

$$\int_0^\theta \mu_1(t)\,dt \leqq \pi\,\sigma_1(m)$$

T_m ニ含マレ T_{m-2} デ閉デナイ代数範囲（二辺形モ含メテ）ヲ限ル T_m ノ項ノ数ヲ $\sigma_2(m)$ トスルト

$(m-1)\pi \leqq \theta \leqq m\pi$ デ

$$\int_0^\theta \mu_2(\theta, t)\,dt \leqq \pi\,\sigma_2(m)$$

デアルカラ

定理III. 級数 $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{\sigma_1(m)+\sigma_2(m)}$

ガ発散スレバFハ抛物的デアル。

二重週期函数 $\wp(z)=w$ ノ作ルリーまん面ハ此ノ條件ヲ満足スル。

§5. Fガ有限個ノ点

$$w=a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots a_\nu$$

デノミ分岐スル場合ニハ、一次変換ト角谷サンノ部分的ナ *Pseudo-regular function* ヲ wー平面ニ用ヒテ a_ν ヲ §4 ノ基本点ニ移ス。$F\longrightarrow F'$ トナルトキ適當ナ *Pseudo-regular* 函数[1]ノ選ビ方ニ對シテFトF'ノ型ハ同一ニナル。Fニ對スル線状複体（*Elfving* ノ）ハF'ノ線状網ト一致スル故ニ此ノ場合ニモ複体ニ対シテ定理III ガ云ハレル。

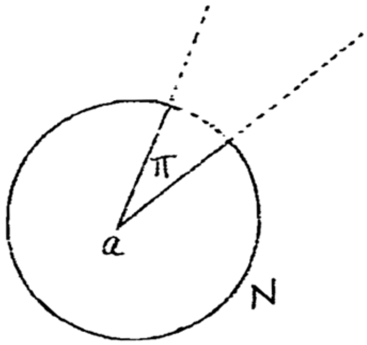
面分ノ個々ニ角谷サンノ方法ヲ適用スレバ、分岐点ノ座標ニツイテハ、モ少シ自由ガ與ヘラレルデアラウ。

註1) 角谷氏本紙49号173 *Pseudo-regular function* ノ應用．又 *Z. Kobayashi, On the type of Riemann surface Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku Sec. A. No. 42 (1935)* ノ方法ト結果ガ同時ニ改良サレタコトニナル。

尚，*Wittich* ガ之レト同一ト思ヘル定理ヲ出シタコトガ *E. Ullrich, Flächenhau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen, Jahresbericht d. D. M. V. Bd. 46, (1936)* ニ述ベアル。証明ハ出テ居ナイ。

§6. Ahlfors ノ場合ヲ考ヘル。[2] 即チ $|w|<\infty$ ニハ代数分岐点ノミ起ル F ヲ取ル。F 上有限ニ w_0 ヲトリ w_0 カラ面上ノゆーくりっど距離ノ最小ガ d 以内ナル点ノ集合ヲ $Q(d)$ トスル。$Q(d)$ ノ境界ノ中 w_0 ヲ F ノ開放的ナ部分ト分ツ一ツノ曲線ヲ $\Gamma(d)$ トシ、ソノゆーくりっどノ長サヲ $L(d)$ トスル。

Ahlfors ノ定理ハ積分 $\int^{\infty}\frac{dt}{L(t)}$ ガ発散スレバ F ハ抛物的デアルト擴張サレル。



サテ $W=\infty$ 上ノ一ツノ正則又ハ代数分岐点ヲ考ヘル。十分大ナル円ノ外ニ此ノ $W=\infty$ ノ正則ナル近傍 N ガトレル。

今一ツノ分岐点 $a\neq\infty$ ヲ頂点トスル単葉角範囲 Π ガ N ト共通部分ヲ持ツトスル。N ノ周ノ長サヲ ε, a ト N ノ周トノ最小距離ヲ δ トスレバ $N\dotplus\Pi$ 上 a カラ $\delta+\varepsilon$ 以下デナイ距離ニアル点ノ集リハ $N\dotplus\Pi$ 内デ閉デル。故ニ a ノ w_0 カラノ最小距離ヲ d トスレバ $Q(\rho)$ ノ境界ハ $\rho>d+\delta+\varepsilon$ デ $N\dotplus\Pi$ 内デ閉デル。故ニ Π ハカヽル ρ デ $\Gamma(\rho)$ ニ対シテ無效デアル。

今代数分岐点 a ヲ頂点トスル ∞ 迄延ビルスベテノ単

註2) L. Ahlfors, Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche. Comment. Math. Helv., 3 (1931)

茉角範囲ニツイテ考ヘルト、十分大ナル ρ デ皆無效ニナルコトガアル、此ノトキ a ハ ρ デ無效デアルト云ハウ。

ρ デ有效ナル且ツ w_0 カラ t 以内ニアル代數分岐点ノ數ヲソノ次數ニ從ッテ數ヘテ $n(t, \rho)$ トスル。

$$L(\rho) \leqq 2\pi \int_0^\rho n(t, \rho)\, dt$$

故ニ Ahlfors ノ定理ノ條件ハ積分

$$\int^\infty \frac{d\rho}{\int_0^\rho n(t, \rho)\, dt}$$

ノ發散ニナル。

サテ、スベテノ代數分岐点ニツイテ w_0 カラノ距離ト無效ニナル最小値 ρ ノ差が有界ナラバ、例ヘバ k ヨリ小サイトスレバ Ahlfors 氏[3] ノ球面上デ得タ定理（角谷サンノ一昨年得ラレタ）が同論文ニ於テ $n\pi$ ノ代リニ k ヲ置キ換ヘテ得ラレル。

定理 IV. F ノスベテノ代數分岐点ノ $\Gamma(d)$ ニ對スル有效區間が有界ナラバ

$$\sum_1^\infty \frac{i}{n(i)}$$

ノ發散が F が拋物的ナルタメノ十分條件デアル。茲ニ $n(i)$ ハ次數ニ從ッテ數ヘタ w_0 カラ $i k$ 以内ニアル代數分岐点ノ

註3) L. Ahlfors. Über eine Klasse von Riemannschen Flächen. Soc. Sci. Fennica Comm. Phy.-Math. IX, (1936)

數デアル。

例ヘバ境界点ヲ持タナイFノ代數分岐点ノ座標ノ集合ガ有界デアレバ、上ノ條件ヲ満足スル。例ヘバ $|w|<K'$ ニ入ルナラバ

$$k=2(\pi+1)k'$$

トナル。